Universidade da Beira Interior

Séries de Problemas

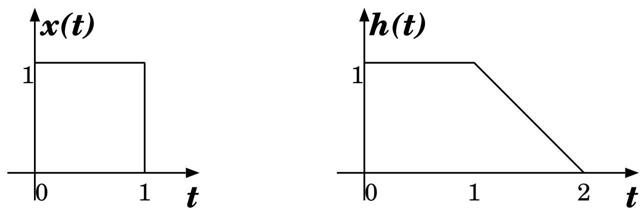
Processamento de Sinal e Imagem

António Manuel Gonçalves Pinheiro

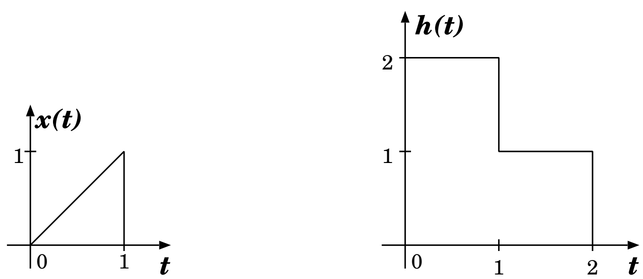
2007/08

1. Obtenha a convolução $y(t) = x(t) * h(t)$ para $x(t)$ e $h(t)$ representados gráficamente nas figuras:

(a)



(b)



2. **(a)** Obtenha o sinal de saída $y(t)$ à saída de um sistema com resposta impulsiva $h(t) = u(t) - u(t-1)$, quando à sua entrada é aplicado o sinal $x(t) = e^{-t}u(t)$.

(b) Qual é a saída de um sistema com resposta impulsiva $g(t) = \delta(t-1)$ quando o sinal de saída $y(t)$, resultante da alínea anterior, é aplicado à entrada? Represente esse sinal graficamente.

(c) Repita o mesmo problema das duas alíneas anteriores quando $h(t) = t \times (u(t) - u(t-1))$, $x(t) = u(t)$ e $g(t) = \delta(t-2)$.

3. Obtenha o sinal de saída $y(t)$ à saída de um sistema contínuo com resposta impulsiva $h(t) = (u(t+1) - u(t-1))$, quando à sua entrada é aplicado o sinal $x(t) = e^{-|t|}$.

4. Obtenha o sinal de saída $y(t)$ à saída de um sistema contínuo com resposta impulsiva $h(t) = e^{t} \times (u(t-1) - u(t-4))$, quando à sua entrada é aplicado o sinal $x(t) = e^{-t}u(t)$.

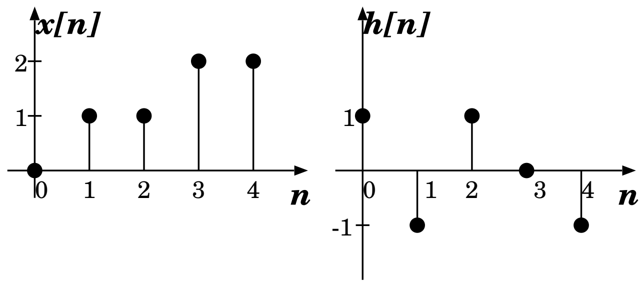
5. Faça a convolução de

(a) $x[n] = n \times (u[n] - u[n-3])$ com $h[n] = \delta[n] - \delta[n-1] - \delta[n-2] + 2 \times \delta[n-4]$.

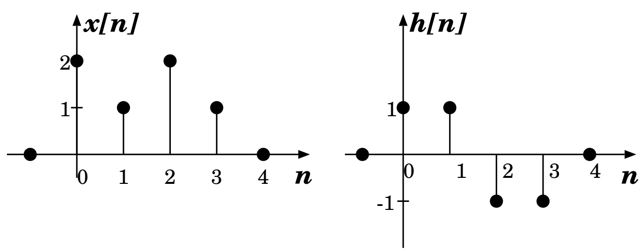
(b) $x(t) = (t-1)\,(u(t) - 2u(t-1) + u(t-2))$ com $h(t) = e^{-\alpha t}u(t)$

6. Obtenha a convolução $y[n] = x[n] * h[n]$ para $x[n]$ e $h[n]$ representados gráficamente nas figuras:

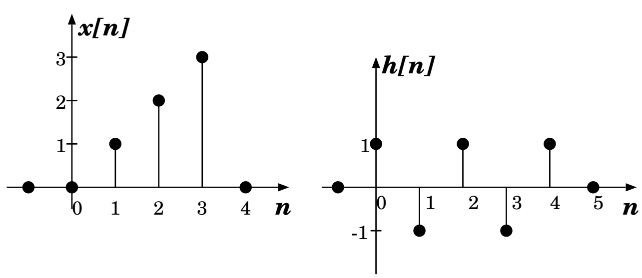
(a)



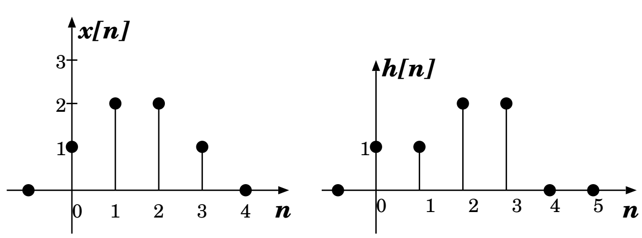
(b)



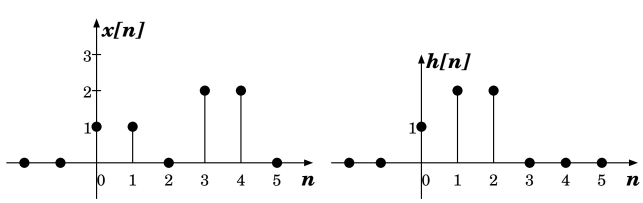
(c)



(d)



(e)



7. Represente analiticamente as respostas impulsivas $h[n]$ do problema anterior.

8. Obtenha o sinal de saída $y[n]$ à saída de um sistema discreto com resposta impulsiva $h[n] = \delta[n] - \delta[n-2] + \delta[n-4]$, quando à sua entrada é aplicado o sinal $xn] = |n| \times (u[n+2] - u[n-3])$.

9. Qual a resposta impulsiva de um sistema linear invariante no tempo (SLIT) em tempo contínuo, cuja resposta ao escalão é dada por

(a)

$$s(t) = 1 - \frac{1}{2}e^{-2t} + \cos(4t)$$

(b)

$$s(t) = 1 - 2\,e^{-\frac{t}{4}} - \frac{1}{8}\cos(4t)$$

10. Considere o sinal dado por $x(t) = e^{-(t-1/2)^2}cos(\omega(t-1/2))$. Obtenha a sua transformada de Fourier.

11. Considere o sinal $x(t) = te^{-t/2}cos(\omega t)u(t)$. Obtenha a sua representação em frequência.

1. Considere a função de transferência:

$$G(s) \;=\; \frac{10^5\, s\,(s+3160)\,(s+10^4)}{(s^2+100s+10^6)\,(s^2+3160s+10^9)}$$

(a) Trace os diagramas de Bode da função de transferência $G(s)$.

(b) Considerando o traçado assimptótico, qual seria a onda de saída para um circuito com esta função de transferência e com uma entrada:

$$\mathrm{v_i(t)} \;=\; 0.5\cos(10^3\,\mathrm{t}) \;+\; \cos(5620\,\mathrm{t})$$

(c) Como poderia chamar a um filtro com esta função de transferência?

(d) Qual poderá ser a utilidade deste filtro em sistemas digitais?

2. Considere a função de transferência:

$$G(s) \;=\; \frac{10^4\, s^2}{(s^2+316s+10^7)\,(s+10^4)}$$

(a) Trace os diagramas de Bode da função de transferência $G(s)$.

(b) Considerando o traçado assimptótico, qual seria a onda de saída para um circuito com esta função de transferência e com uma entrada:

$$\mathrm{v_i(t)} \;=\; 0.5\cos(1000\,\mathrm{t}) \;+\; \cos(5620\,\mathrm{t})$$

(c) Como poderia chamar a um filtro com este traçado assimptótico? Quais as suas características?

(d) Considerando o traçado real do diagrama de amplitude, como chamaria este filtro? Quais são as suas características?

3. Considere a função de transferência:

$$G(s) \;=\; \frac{3.16\times 10^6\, s}{(s^2+100s+10^6)\,(s+3160)}$$

(a) Trace os diagramas de Bode da função de transferência $G(s)$.

(b) Considerando o traçado assimptótico, qual seria a onda de saída para um circuito com esta função de transferência e com uma entrada:

$$\mathrm{v_i(t)} \;=\; 0.5\cos(1000\,\mathrm{t}) \;+\; \cos(5620\,\mathrm{t})$$

(c) Considerando o traçado real, qual seria a onda de saída para um circuito com esta função de transferência e com uma entrada:

$$\mathrm{v_i(t)} \;=\; \cos(1000\,\mathrm{t})$$

(d) Considerando o traçado real do diagrama de amplitude, como chamaria este filtro? Quais são as suas características?

4. Considere a função de transferência:

$$G(s) \;=\; \frac{10^3\, s\,(s+10000)}{(s^2+100s+10^7)\,(s+31600)}$$

(a) Trace os diagramas de Bode da função de transferência $G(s)$.

(b) Considerando o traçado assimptótico, qual seria a onda de saída para um circuito com esta função de transferência e com uma entrada:

$$\mathrm{v_i(t)} \;=\; 0.5\cos(3160\,\mathrm{t}) \;+\; \cos(5620\,\mathrm{t})$$

(c) Considerando o traçado real, qual seria a onda de saída para um circuito com esta função de transferência e com uma entrada:

$$\mathrm{v_i(t)} \;=\; \cos(3160\,\mathrm{t})$$

(d) Considerando o traçado real do diagrama de amplitude, como chamaria este filtro? Quais são as suas características?

5. Considere a função de transferência:

$$G(s) \;=\; \frac{10^8\, s\,(s+1000)}{(s^2+316s+10^7)\,(s+10^4)^2}$$

(a) Trace os diagramas de Bode da função de transferência $G(s)$.

(b) Considerando o traçado assimptótico, qual seria a onda de saída para um circuito com esta função de transferência e com uma entrada:

$$\mathrm{v_i(t)} \;=\; 0.5\cos(3160\,\mathrm{t}) \;+\; \cos(5620\,\mathrm{t})$$

(c) Considerando o traçado real, qual seria a onda de saída para um circuito com esta função de transferência e com uma entrada:

$$\mathrm{v_i(t)} \;=\; \cos(3160\,\mathrm{t})$$

(d) Considerando o traçado real do diagrama de amplitude, como chamaria este filtro? Quais são as suas características?

6. Considere a função de transferência:

$$G(s) = \frac{100\, s\,(s+1000)\,(s+10^5)}{(s^2+31,6s+10^7)\,(s^2+100s+10^8)}$$

(a) Trace os diagramas de Bode da função de transferência $G(s)$.

(b) Considerando o traçado assimptótico, qual seria a onda de saída para um circuito com esta função de transferência e com uma entrada:

$$\mathrm{v_i(t)} = 2\cos(3160\,\mathrm{t}) + \cos(5620\,\mathrm{t})$$

(c) Considerando o traçado real, qual seria a onda de saída para um circuito com esta função de transferência e com uma entrada:

$$\mathrm{v_i(t)} = 0.1\cos(3160\,\mathrm{t})$$

(d) Considerando o traçado real do diagrama de amplitude, como chamaria este filtro? Quais são as suas características?

7. Considere a função de transferência:

$$G(s) = \frac{10^4\, s\,(s+10000)\,(s+31600)}{(s^2+316s+10^6)\,(s^2+10^3s+10^{10})}$$

(a) Trace os diagramas de Bode da função de transferência $G(s)$.

(b) Considerando o traçado assimptótico, qual seria a onda de saída para um circuito com esta função de transferência e com uma entrada:

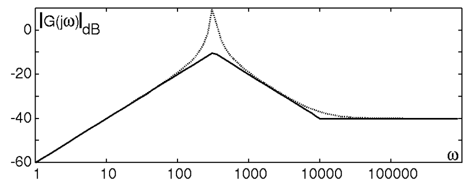
$$\mathrm{v_i(t)} = 2\cos(316\,\mathrm{t}) + 4\cos(56200\,\mathrm{t})$$

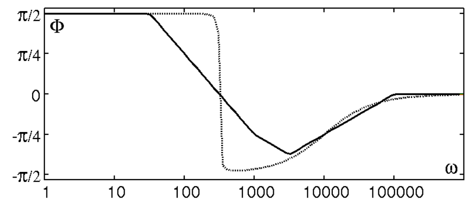
(c) Considerando o traçado real, qual seria a onda de saída para um circuito com esta função de transferência e com uma entrada:

$$\mathrm{v_i(t)} = 3\cos(10^3\,\mathrm{t}) + 3\cos(10^5\mathrm{t})$$

(d) Considerando o traçado real do diagrama de amplitude, como chamaria este filtro? Quais são as suas características?

8. Considere os diagramas de Bode da figura (Amplitude e Fase) em que o traçado contínuo corresponde aos diagramas assimptóticos e o tracejado aos diagramas reais.





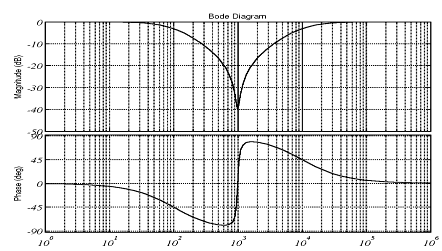
(a) Obtenha a função de transferência do sistema representado pelos diagramas de Bode da figura.

(b) Considerando o traçado real, qual seria a onda de saída para um circuito com esta função de transferência e com uma entrada:

$$\mathrm{v_i(t)} \;=\; 0.1\cos(316\,\mathrm{t}) \;+\; 10\cos(10000\,\mathrm{t})$$

(c) Obtenha o filtro digital equivalente para uma frequência de amostragem de $f_a = 10^8$Hz (use a transformada bilinear).

9. Considere os Diagramas de Bode da figura ao lado.



(a) Obtenha a função de transferência do sistema.

(b) Obtenha a resposta do sistema para o sinal $v_i(t) = 0.1\cos(316\,t) + \cos(1000\,t)$

(c) De que tipo de filtro se trata?

10. Considere a tabela em que estão representados para um sinal $x(t) = X_0\cos(\omega t)$ à entrada de um sistema de que resulta o sinal $y(t) = Y_0\cos(\omega t + \phi)$ a relação Y_0/X_0 e o valor de ϕ:

ω	316	1000	3160	10000
Y_0/X_0	0.0562	1	1	0.0562
ϕ	π	$3\pi/8$	$-3\pi/8$	$-\pi$

(a) Trace um esboço aproximado dos diagramas de Bode representados por estes pontos.

(b) Considerando que os gráficos anteriores resultam de uma representação aproximada dos diagramas do sistema em questão, de que tipo de filtro se trata?

(c) Considerando que o sistema em causa é um filtro de Chebyshev com "ripple"de 1dB, diga qual seria a alteração que se deveria observar no diagrama de amplitude?

11. Considere a tabela, em que estão representados para um sinal $x(t) = X_0 \cos(\omega t)$ à entrada de um sistema de que resulta o sinal $y(t) = Y_0 \cos(\omega t + \phi)$, a relação Y_0/X_0 e o valor de ϕ:

ω	10	100	1000	1780	3160	5630	10^4	10^5	10^6
Y_0/X_0	0.001	0.01	0.1	0.25	1.0	0.25	0.1	0.01	0.001
ϕ	$\pi/2$	$\pi/2$	$11\pi/24$	$5\pi/12$	0	$-5\pi/12$	$-11\pi/24$	$-\pi/2$	$-\pi/2$

(a) Trace um esboço aproximado dos diagramas de Bode representados por estes pontos.

(b) Obtenha uma função de transferência de um sistema que resulte neste diagrama de Bode aproximado.

(c) De que tipo de filtro se trata?

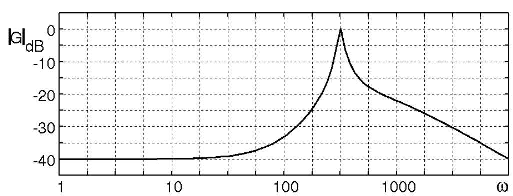
(d) Qual seria a onda de saída para um circuito com esta função de transferência

e com uma entrada: $\mathrm{v_i(t)} = 0.2\cos(3160\,\mathrm{t}) + 0.5\cos(5630\,\mathrm{t})$

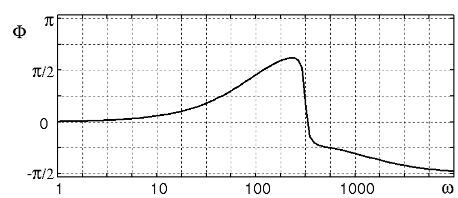
12. Considere a resposta em frequência (diagramas de Bode) representativos de um sistema linear e invariante no tempo. Obtenha a saída do sistema quando à entrada se tem o sinal:

(a) $x(t) = 0.2\cos(316\,t) + 2\cos(3160\,t)$

(b) $x(t) = 3\cos(562\,t)$



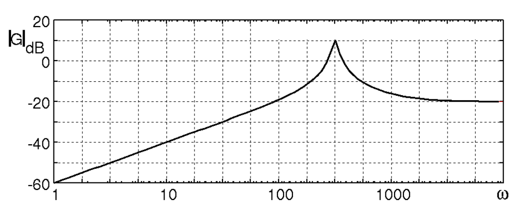
(diagrama de amplitude)



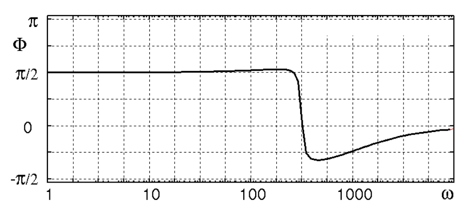
(diagrama de fase)

13. Considere a resposta em frequência (diagramas de Bode) representativos de um sistema linear e invariante no tempo. Obtenha a saída do sistema quando à entrada se tem o sinal:

$x(t) = 0.2\cos(316\,t) + 2\cos(562\,t)$



(diagrama de amplitude)



(diagrama de fase)

1. Projecte um Filtro Analógico de Butterworth passa alto de ordem 3, com frequência de corte
$\omega_c = 2000$ rad/s.

2. **(a)** Projecte um Filtro Digital de Chebyshev passa baixo de ordem 2, com Ripple na banda de passagem de 0.1 dB, e com frequência de corte $\Omega_c = \Pi/8$, usando a transformada bilinear, considerando que a frequência de amostragem é $f_a = 100$ KHz.
Nota: Os polos do filtro passa baixo analógico de Chebyshev de ordem 2 com frequência de corte $\omega_c = 1$ rad/s e Ripple na banda de passagem de 0.1 dB são $p_{1,2} = -0.6104 \pm j\,0.7106$

(b) Qual a relação entre o máximo e o mínimo na banda de passagem?

(c) Qual o valor de da frequência de corte correspondente a um filtro passa-baixo analógico?

3. **(a)** Projecte um Filtro analógico de Butterwordth passa alto de ordem 4, com frequência de corte $\omega_c = 10$ KHz.

(b) Obtenha o Filtro Digital equivalente usando a transformada bilinear, considerando que a frequência de amostragem é $f_a = 250$ KHz.

(c) Qual a frequência de corte digital Ω_c do filtro digital resultante?

4. **(a)** Projecte um Filtro de Chebyshev passa alto de ordem 3, com Ripple na banda de passagem de 1 dB com frequência de corte $\omega_c = 5000$ Hz.
Nota: Os polos do filtro passa baixo analógico de Chebyshev de ordem 3 com frequência de corte $\omega_c = 1$ rad/s e Ripple na banda de passagem de 1 dB são $p_{1,2} = -0.2257 \pm j\,0.8822$ e $p_3 = -0.4513$.

(b) Obtenha o Filtro Digital equivalente usando a transformada bilinear, considerando que a frequência de amostragem é $f_a = 100$ KHz.

(c) Qual a frequência de corte digital Ω_c do filtro digital resultante?

5. Obtenha o filtro de Butterworth passa baixo de ordem 4 com frequência de corte $\omega_c = 10000$ rad/s.

(a) Projecte um Filtro analógico de Butterwordth passa alto de ordem 5, com frequência de corte $f_c = 5$ KHz.

(b) Obtenha o Filtro Digital equivalente usando a transformada bilinear, considerando que a frequência de amostragem é $f_a = 100$ KHz.

(c) Qual a frequência de corte digital Ω_c do filtro digital resultante?

6. **(a)** Projecte um Filtro de Chebyshev passa alto de ordem 4, com Ripple na banda de passagem de 0.5 dB e com frequência de corte $f_c = 5000$ Hz.
   Nota: Os polos do filtro passa baixo analógico de Chebyshev de ordem 4 com frequência de corte $\omega_c = 1$ rad/s e Ripple na banda de passagem de 0.5 dB são $p_{1,2} = -0.1754 \pm j\,1.0163$ e $p_{3,4} = -0.4233 \pm j\,0.4209$.

   (b) Obtenha o Filtro Digital equivalente usando a transformada bilinear, considerando que a frequência de amostragem é $f_a = 10$ MHz.

   (c) Qual a frequência de corte digital Ω_c do filtro digital resultante?

   (d)

7. (a) Projecte um Filtro de Chebyshev digital passa alto de ordem 3, com Ripple na banda de passagem de 0.5 dB e com frequência de corte $\Omega_c = 0.05\pi$. Considere a frequência de amosstragem $f_a = 10$ KHz e que os polos do filtro analógico normalizado de Chebyshev com estas especificações são: $p_{1,2} = -0.2683 \pm j\,0.8753$ e $p_3 = -0.5366$

   (b) Qual a frequência de corte de um filtro analógico equivalente?

   (c) Qual a frequência máxima de um sinal analógico processado por este filtro depois de amostrado? Justifique.

   (d) Quais as vantagens de aumentar o Ripple na banda de passagem? Quais as desvantagens?

8. (a) Considere o filtro digital dado por $h[n] = (3/4)^{|n-3|}$. Obtenha o filtro FIR de ordem 6, resultante da aplicação da janela de Bartlett.

   (b) O filtro FIR resultante tem fase linear? Se for linear qual é?

   (c) Qual a vantagem de uma filtro ter fase linear? Qual a diferença em relação a um filtro sem essa propriedade?

9. (a) Considere o filtro discreto dado por $h[n] = \dfrac{1}{1 + (n-2)^2} u[n]$

   Obtenha a resposta impulsiva do filtro FIR de ordem 4, resultante da aplicação da janela de Hamming.

   (b) Qual a função de transferência do filtro FIR?

10. Considere o filtro FIR dado pela resposta impulsiva

$$h[n] = \delta[n] + (1 + \sqrt{2})\,\delta[n-1] + (1 + \sqrt{2})\,\delta[n-2] + \delta[n-3]$$

   (a) Obtenha a função de transferência?

   (b) Quais são os polos e zeros da função de transferência? (Considere um dos zeros em $Z = -1$).

   (c) Qual a fase deste filtro?

11. Considere o filtro FIR dado pela equação às diferenças

$$y[n] = x[n] + \frac{3}{2}x[n-1] + \frac{3}{2}x[n-2] + x[n-3]$$

(a) Obtenha a função de transferência?

(b) Quais são os polos e zeros da função de transferência? (Considere um dos zeros em $Z = -1$).

(c) Qual a fase deste filtro?

12. Considere o filtro digital dado pela função de transferência

$$H(Z) = 1 + \frac{3}{2}Z^{-1} + \frac{3}{2}Z^{-2} + Z^{-3}$$

(a) Obtenha a resposta impulsiva que define o filtro?

(b) Obtenha a equação às diferenças que define o filtro?

(c) Quais são os polos e zeros da função de transferência? (Considere um dos zeros em $Z = -1$).

(d) De que tipo de filtro se trata?

(e) Qual a fase deste filtro?

13. Considere o filtro FIR dado pela equação às diferenças:

$$y[n] = -0.0625\times x[n] - 0.25\times x[n-1] + 0.75\times x[n-2] - 0.25\times x[n-3] - 0.0625\times x[n-4]$$

(a) Obtenha a função de transferência?

(b) Qual a fase deste filtro?

(c) Comente sobre a eventual facilidade de implementação real deste filtro?

14. Considere o filtro FIR dado pela equação às diferenças:

$$y[n] = 0.0288 \times x[n] + 0.1431 \times x[n-1] + 0.3282 \times x[n-2] +$$

$$0.3282 \times x[n-3] + 0.1431 \times x[n-4] + 0.0288 \times x[n-5]$$

(a) Obtenha a função de transferência?

(b) Comente sobre a eventual facilidade de implementação real deste filtro?

15. Considere o filtro FIR dado pela equação às diferenças:

$$y[n] = 0.03125\times x[n] - 0.125\times x[n-2] + 0.5\times x[n-3] - 0.125\times x[n-4] + 0.03125\times x[n-6]$$

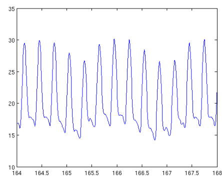
(a) Qual a resposta impulsiva do filtro?

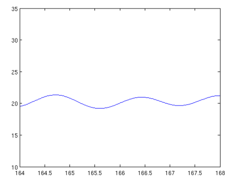
(b) Obtenha a função de transferência deste filtro?

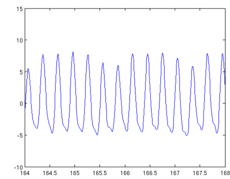
(c) Qual a fase deste filtro?

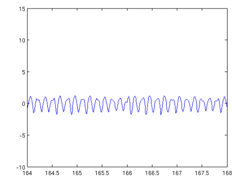
(d) Comente sobre a eventual facilidade de implementação real deste filtro?

16. Na figura seguinte está representado um sinal de pressão craniana arterial que varia no tempo (a) e respectivas filtragens passa-banda, passa-alto e passa-baixo. Identifique quais as figuras resultantes de cada um dos filtros. Justifique.

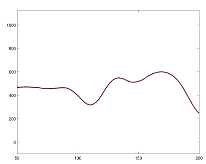

(a) Original

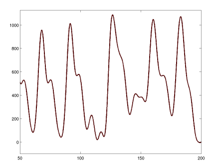

(c)

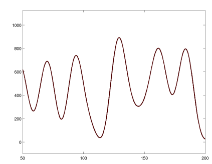

(b)

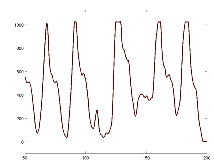

(d)

17. Considere os resultados das filtragens por filtros FIR de fase linear com diferentes especificações da frequência de corte.


(i)


(ii)


(iii)


(iv)

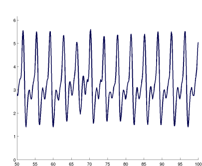
(a) De que tipo de filtros se trata? Justifique.

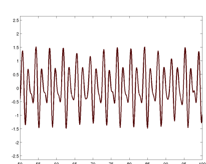
(b) Coloque por ordem crescente do valor da frequência de corte as figuras.

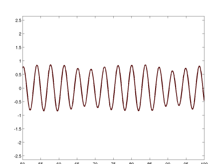
18. Um sinal $s_0[n]$ representado em (i) foi filtrado por um conjunto de filtros FIR passa alto com frequências de corte $\omega_1, < \omega_2, < \omega_3$, resultando respectivamente nos sinais $s_1[n]$, $s_2[n]$ e $s_3[n]$. Esses sinais foram combinados resultando nos sinais: $s_1[n]-s_2[n]$, $s_2[n]-s_3[n]$ e $s_1[n]-s_3[n]$.

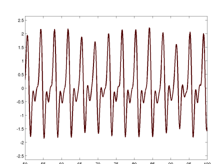
(a) Que tipo de filtragem resulta para as diferentes combinações? Justifique.

(b) Quais das figuras (ii), (iii), (iv) correspondem a cada uma das combinações? Justifique.


(i)


(ii)

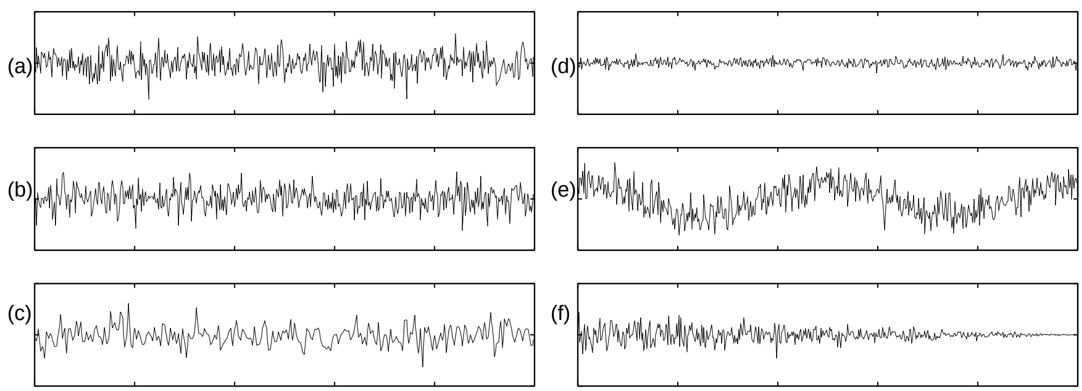

(iii)


(iv)

1. Considere um sinal $x[n]$ que representa uma sequência de lançamento de um dado. Calcule a autocorrelação $R_x[k]$ e o espectro de potência $G_x(e^{j\Omega})$.
Nota: Quando 2 sinais $x[n]$ e $y[n]$ são não correlacionados, então: $E\{x[n]y[n]\} = E\{x[n]\}\,E\{y[n]\}$.

2. Considere um sinal $x[n]$ que representa uma sequência de lançamento de um dado cujas faces são compostas por: 3 UNS, 2 DOIS e 1 TRÊS. Calcule a autocorrelação $R_x[k]$ e o espectro de potência $G_x(e^{j\Omega})$.
Nota: Quando 2 sinais $x[n]$ e $y[n]$ são não correlacionados, então: $E\{x[k]y[k]\} = E\{x[k]\}\,E\{y[k]\}$.

3. Considere os sinais representados na figura.



Compare os sinais (a) e os restantes relativamente à média e ao momento de segunda ordem, temporal e conjunto ($E\{x(t)\}$, $E\{x^2(t)\}$, $< x(t) >$, $< x^2(t) >$)?

4. Considere o sinal $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta(t))$, em que o $\theta(t)$ pode assumir os valores $\theta(t) \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$ com igual probabilidade.

- **(a)** Calcule a função de autocorrelação do sinal?
- **(b)** Calcule o espectro de potência do sinal?
- **(c)** Qual o espectro de potência do sinal após passar num filtro com função de transferência $H(j\omega) = e^{j\omega t_h}$?

5. Considere um sinal aleatório $x(t)$ com densidade espectral de potência

$$G_x(\omega) = \frac{2\alpha}{\omega^2 + \alpha^2}$$

sendo α constante.

- **(a)** Obtenha uma expressão para a funcão autocorrelação $R_x(\tau)$

(b) Qual a função autocorrelação $R_y(\tau)$ que resulta à saída de um filtro com função de transferência

$$H(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)}$$

quando o sinal $x(t)$ é aplicado à sua entrada.

(c) Considere que o sinal $x(t)$ é corrompido com ruído branco aditivo gaussiano com densidade espectral de potência σ_v, resultando $w(t) = x(t) + v(t)$. Para recuperar o sinal $x(t)$, $w(t)$ é amostrado com uma frequência ω_a e filtrado com um Filtro FIR de Wiener. Obtenha o filtro de Wiener FIR de ordem 2 que permita uma estimativa $\hat{x}(t)$.

6. Considere o sinal da alínea 4. Assuma que este sinal é corrompido com ruído branco gaussiano aditivo com densidade espectral σ_v, resultando $y(t) = x(t) + v(t)$.

(a) Obtenha uma expressão para o filtro de Wiener estimador óptimo de $x(t)$, não causal.

(b) Considere que o sinal é amostrado com uma frequência $\omega_a = 3 * \omega_0$. Obtenha o filtro de Wiener FIR de primeira ordem que estime o sinal $x[k]$.

7. Considere um sinal aleatório $x(t)$ com função de autocorrelação

$$R_x(\tau) \;=\; Ae^{-\alpha|\tau|}\cos(\omega_c\tau)$$

sendo A, α e ω constantes.

(a) Obtenha uma expressão para a funcão densidade especral de potência $G_x(\omega)$

(b) Representa a funcão densidade espectral de potência $G_x(\omega)$ graficamente.

(c) Qual a função autocorrelação $R_y(\tau)$ que resulta à saída de um filtro com função de transferência

$$H(j\omega) = \frac{1}{(\alpha + j\omega)}$$

quando o sinal $x(t)$ é aplicado à sua entrada.

(d) Obtenha uma expressão para um filtro de Wiener ideal não causal.

(e) Considere que o sinal $x(t)$ é corrompido com ruído branco aditivo gaussiano com densidade espectral de potência σ_v, resultando $w(t) = x(t) + v(t)$. Para recuperar o sinal $x(t)$, $w(t)$ é amostrado com uma frequência ω_a e filtrado com um Filtro FIR de Wiener. Obtenha o filtro de Wiener FIR de ordem 1 que permita uma estimativa $\hat{x}(t)$.

1. Considere a imagem da figura, em que no interior de cada quadrícula está o nível de cinzento.

5	6	5	6	7	6
5	5	6	7	6	5
5	6	7	8	7	6
5	6	7	6	6	5
5	5	6	7	5	5
5	5	5	5	5	5

(a) Obtenha a imagem resultante quando se aplica a máscara à direita (considere o canto superior esquerdo como o pixel (0,0))?

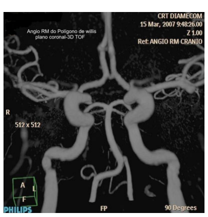
1	0
0	-1

(b) Qual a função deste operador?

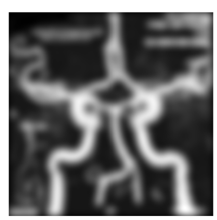
(c) Obtenha a imagem resultante da aplicação do filtro mediano de 3×3.

(d) Obtenha a imagemm resultante da aplicação do operador de Sobel.

2. Considere as imagens da figura em que se representa mais à esquerda a imagem original seguida de três resultados de filtragens. Diga, justificando qual é a imagem resultante da filtragem passa-baixo, da passa-banda e da passa-alto?

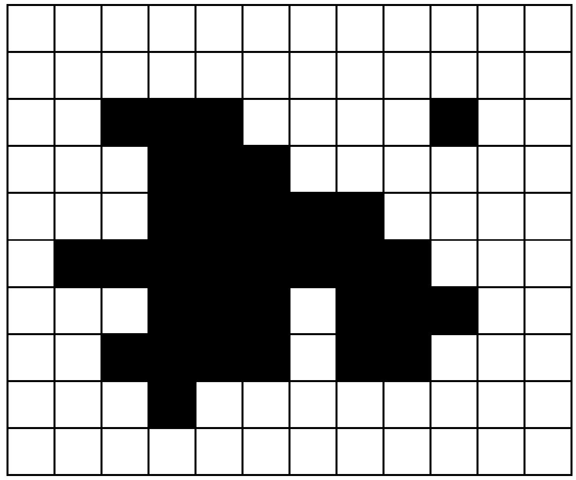

Original


(a)


(b)


(c)

3. Considere a imagem binária da figura.



Obtenha as imagens resultantes da aplicação da dilatação, erosão , fecho e abertura pelos seguintes elementos estruturantes (considere o ponto central a origem do elemento estruturante).

(a)

1	1	1
1	1	1
1	1	1

(b)

1	1	1	1	1

(c)

	1	
1		1
	1	

4. Considere a imagem multinível do problema 1.

(a) Obtenha as imagens que resultam da Dilatação, Erosão, Fecho e Abertura multinível com o elemento estruturante à direita (considere o pixel central como o pixel (0,0))?

0	0	0
0	0	0
0	0	0

(b) Para o mesmo elemento estruturante obtenha a imagem que resulta do cálculo do gradiente morfológico.

(c) Repita os problemas da alínea anterior para os elementos estruturantes (considere o ponto central a origem do elemento estruturante):

0	1	0
1	2	1
0	1	0

	0	0	0	
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
	0	0	0	

	0	0	0	
0				0
0				0
0				0
	0	0	0	

5. Considere a imagem da figura (esquerda) e o elemento estruturante (figura da direita). Obtenha o resultado da abertura pelo elemento estruturante representado. Comente o resultado.

6	6	6	6	7	7	7	7	7	7	7	7
6	9	7	7	7	7	9	9	9	9	9	6
7	9	9	9	9	9	10	10	12	10	8	6
7	7	8	10	10	10	12	10	10	9	7	6
10	7	8	10	12	13	12	10	9	8	7	6
10	10	7	8	10	12	10	9	8	7	7	6

1		1
	0	
1		1

6. Considere a imagem da figura (direita).

10	12	13	8	15	21	24	24	24	21	12	11
16	13	13	9	7	13	20	21	20	16	10	6
20	22	23	9	9	8	10	15	18	21	16	12
21	23	25	16	12	10	12	10	10	16	17	11

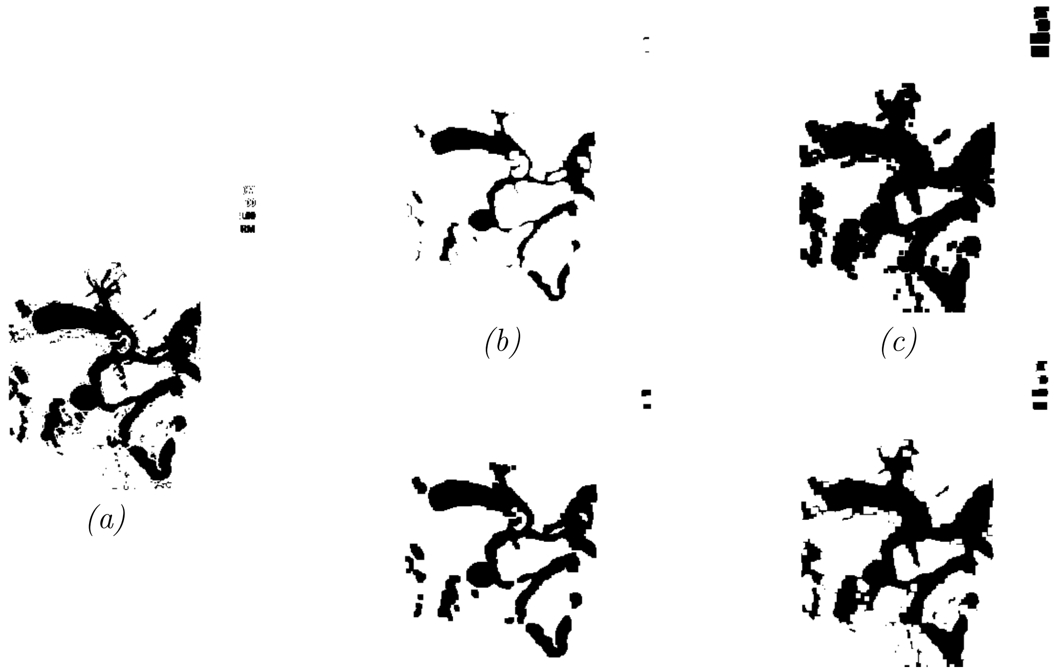
(a) Obtenha o resultado da dilatação pelo elemento estruturante:

1	3	0	3	1

(b) Obtenha o resultado da filtragem pela máscara:

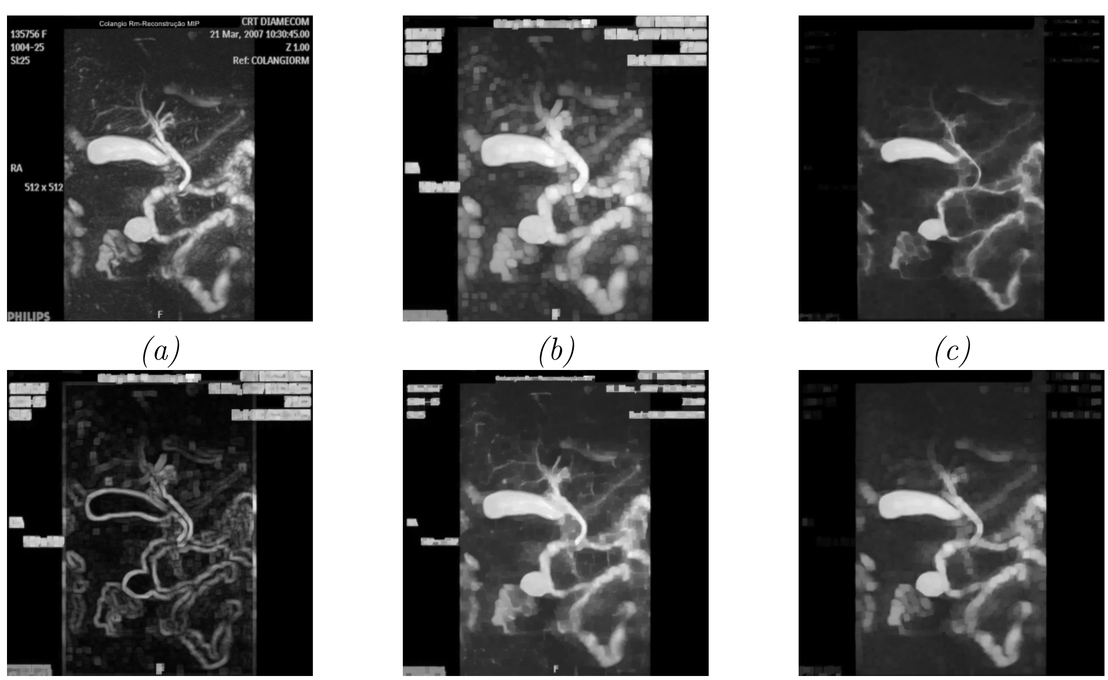
1	3	1
3	0	3
1	3	1

7. Identifique as operações morfológicas utilizadas para gerar as imagens *(b)* a *(e)* a partir da imagem binária *(a)*.



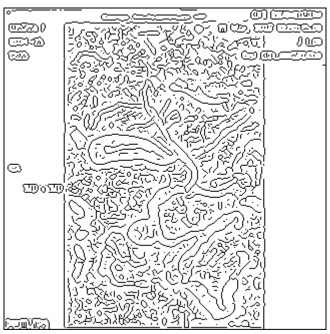
(a) *(b)* *(c)* *(d)* *(e)*

8. Identifique as operações morfológicas utilizadas para gerar as imagens *(b)* a *(f)* a partir da iamgem binária *(a)*.

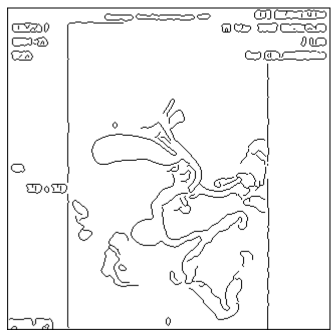


(a) *(b)* *(c)* *(d)* *(e)* *(f)*

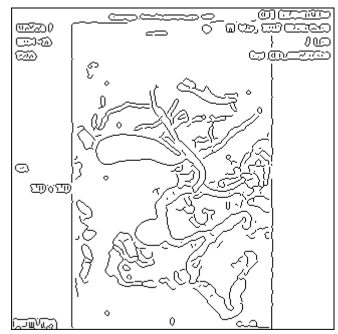
9. Para a imagem da figura seguinte foram obtidos os limiares representados nas figuras *(a)* a *(f)* com o algoritmo de Canny. Considerando o resultado reponda às seguintes perguntas.



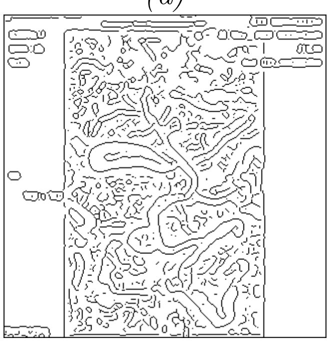
(a)



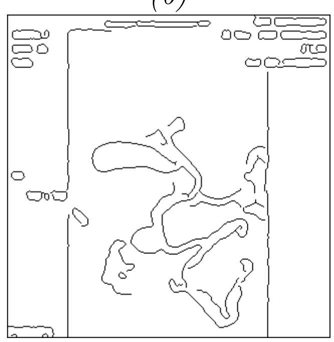
(b)



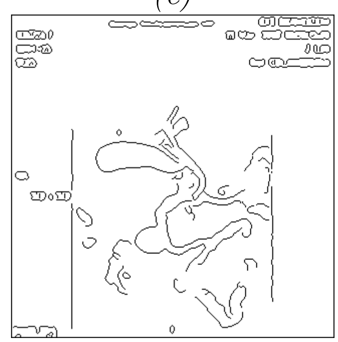
(c)



(d)



(e)



(f)

(a) Compare *(a)* e *(d)* relativamente à banda da filtragem da gaussiana (ou em relação ao parâmetro σ).

(b) Compare *(b)* e *(e)* relativamente à banda da filtragem da gaussiana (ou em relação ao parâmetro σ).

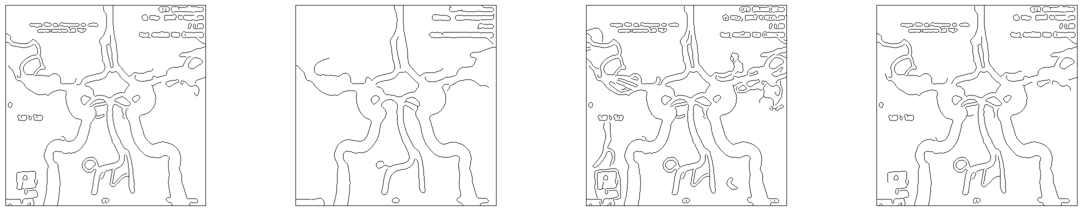
(c) Qual o efeito provocado pelo parâmetro σ nos limiares finais?

(d) *(b)* e *(c)* foram obtidas com valor de "threshold" mais alto de histerese diferente. Compare-as relativamente a esse parâmetro.

(e) *(b)* e *(f)* foram obtidas com valor de "threshold" mais baixo de histerese diferente. Compare-as relativamente a esse parâmetro.

(f) Qual o efeito provocado pelos parâmetros da histerese nos limiares finais?

10. Nas imagens seguintes foram obtidas imagens representativas dos limiares da imagem da alinea anterior usando o algoritmo de Canny com diferentes valores dos parâmetros.



(a) (b) (c) (d)

(a) Compare (a) e (b) relativamente ao parâmetro σ da filtragem gaussiana.

(b) Compare (a) e (c) relativamente ao parâmetro de limiar mais alto da histerese.

(c) Compare (a) e (d) relativamente ao parâmetro de limiar mais baixo da histerese.

(d) Comente sobre o efeito da parametrização do algoritmo de Canny?

11. Considere o resultado de comparação com o conjunto de treino num classificador kNN de uma dado vector que se pretende classificar:

Treino da Classe 1							Treino da Classe 0						
0.11	0.98	0.64	0.33	0.57	0.86	0.81	0.62	0.25	0.73	0.43	0.38	0.64	0.55

(a) Qual o resultado da decisão do classificador para k=5, se o critério da maioria for adoptado?

(b) Qual o intervalo de confiança de se classificar como Classe 1 para k=5.

(c) Considerando o exemplo comente sobre o tipo de decisão a adoptar dependendo do objectivo. Considere por exemplo que a Classe 1 representa uma situação de patologia grave, enquanto a Classe 0 representa uma situação sem essa patologia.

12. Considere a tabela. Nela estão representadas as distâncias calculadas a partir de vectores característicos de um conjunto de imagens de treino de duas classes diferentes. Assim, $d_{nmp} = d(\vec{t_{nm}}, \vec{v_p})$ representa as distâncias entre os vectores caracteísticos das imagens a classificar representadas pelos vectores $\vec{v_k}$ e os vectores caracteísticos $\vec{t_{1i}}$ de treino da classe 1 e $\vec{t_{2j}}$ de treino da classe 2. Pretendem-se classificar com base nas distâncias da tabela as imagens p usando o algoritmo kNN.

p	d_{11p}	d_{12p}	d_{13p}	d_{14p}	d_{15p}	d_{21p}	d_{22p}	d_{23p}	d_{24p}	d_{25p}
1	0.435	0.135	0.632	0.256	0.396	0.325	0.390	0.786	0.295	0.782
2	0.127	0.211	0.546	0.311	0.456	0.865	0.455	0.673	0.231	0.308
3	0.564	0.238	0.842	0.432	0.142	0.231	0.526	0.187	0.012	0.801
4	0.245	0.451	0.385	0.431	0.502	0.311	0.325	0.420	0.402	0.378

(a) Considerando k=3 qual seria a classe atribuida a cada uma das k imagens a classificar?

(b) E caso k= 5?

(c) Calcule os intervalos de confiança para a classe 1 considerando k=4
(= Numero de vectores de treino da classe 1 das k imagens seleccionadas/ k)

13. Considere os vectores descritores, representativos de uma base de dados:
$\vec{v}_1 = (1, 3, 2, 4)$ $\vec{v}_2 = (3, 5, 2, 1)$ $\vec{v}_3 = (2, 4, 1, 1)$ $\vec{v}_4 = (6, 3, 1, 3)$
$\vec{v}_5 = (2, 1, 4, 3)$ $\vec{v}_6 = (5, 1, 1, 4)$ $\vec{v}_7 = (4, 2, 6, 3)$ $\vec{v}_8 = (1, 5, 3, 3)$

(a) Considere o vector $\vec{v}_q = (4, 5, 1, 2)$. Qual é o elemento da base de dados mais semelhante?

(b) Considere os primeiros 4 vectores pertencentes a uma classe 1 e os restantes à classe oposta. Qual o valor do intervalo de confiança de este vector pertencer à classe 1 considerando k=3 num sistema de decisão baseado no kNN?

(c) Nesse caso, qual o resultado, baseando a decisão no critério da maioria?